

Modelado de estrategias para el control químico y biológico del *Aedes aegypti* (Diptera: Culicidae)

Carol Vanessa Marín G.
Universidad del Quindío

Anibal Muñoz Loaiza
Universidad del Quindío

Hernán Darío Toro Zapata
Universidad del Quindío

Leonardo Duván Restrepo Alape
Universidad del Quindío

Recibido Jun. 08, 2010

Aceptado Feb. 17, 2011

Abstract

In this we designed and analyzed a mathematical model for the population dynamics of the *Aedes aegypti*. In this model it is included the biological cycle of the vector and the control strategies, chemical for the adult and biological for vectors immature. A system of differential equations describing the dynamics is proposed in this model. The local stability was analyzed by means of the mosquito growth threshold and it was also simulated the dynamics in different conditions. The behavior of the growth threshold with the control strategies allows the determination of control effectiveness.

Keywords: Mathematical Models, Biological Control, Chemical Control, *Aedes aegypti*.

MSC(2000): 93C15, 92B05

Resumen

En este trabajo hemos diseñado y analizado un modelo matemático para la dinámica poblacional del *Aedes aegypti*. En este modelo se incluye el ciclo biológico del vector y las estrategias de controles; químico para el adulto y biológico para los vectores inmaduros. El modelo se plantea mediante un sistema de ecuaciones diferenciales que describen la dinámica. La estabilidad local se analizó mediante el umbral de crecimiento de mosquitos y también fue simulada la dinámica en diferentes condiciones. El comportamiento del umbral de crecimiento con las estrategias de control permite la determinación de la eficacia del control.

Palabras y frases claves: Modelos Matemáticos, Control biológico, Control químico, *Aedes aegypti*.

1 Introducción

El dengue es una infección viral aguda que carece de vacuna como método de control, esto ha llevado a que los esfuerzos de las instituciones de salud se orienten al control químico, cultural y biológico del mosquito *Aedes aegypti* pero con resultados parciales, puesto que el vector se ha venido extendiendo a regiones donde antes no tenía presencia principalmente debido a los cambios climáticos, y a la adquisición de resistencia contra algunos insecticidas. Estos aspectos hacen que esta enfermedad viral sea de difícil control y por lo tanto de gran impacto en la salud pública. En este sentido, uno de los problemas de mayor importancia en la eco-epidemiología matemática del dengue clásico consiste en determinar estrategias adecuadas de control y para ello resulta ser de gran valor el aporte que los modelos matemáticos pueden hacer a la comprensión de la problemática.

Los métodos biológicos de control del mosquito consisten básicamente en la utilización de enemigos naturales de los mosquitos y de toxoides biológicos. Se han observado plantas depredadoras, invertebrados como *Toxorhynchites* (un género de mosquitos) y animales vertebrados como peces, ranas y patos que se alimentan de estadios del mosquito, virus, bacterias y hongos entomopatógenos y larvas de odonátpteros [14],[30].

Los peces larvívoros más usados para el control del mosquito son *Gambusia* y guppy *Poecilia reticulata*, pero no han sido usados a gran escala en los programas de control y se sigue estudiando en laboratorio y campo su efectividad como potenciales controladores biológicos. Al respecto se han realizado investigaciones experimentales en laboratorio y campo y con un enfoque de modelado matemático [6],[4],[5],[17],[27],[28],[30].

En relación al modelado matemático en dengue, se han construido y analizado modelos matemáticos con base en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones diferenciales parciales, ecuaciones íntegrodiferenciales y redes topológicas orientados a estudiar:

- La dinámica de transmisión del dengue clásico con población humana constante y población humana variable [2],[7],[10],[18],[9].
- La transmisión vertical en el mosquito [12].
- La dinámica de transmisión espacio - temporal [1],[26].
- La dinámica de transmisión de los diferentes serotipos de virus [11],[13].
- La dinámica poblacional estocástica [22],[25].
- La dinámica de estructura poblacional [20],[24],[25].
- El control del mosquito: utilizando el efecto de los adulticidas y larvicidas en las tasas de mortalidad constantes [31],[21].
- Estrategias de control aplicando el Principio del Máximo de Pontryagin [3],[16],[15].

El principal objetivo de este trabajo es construir y analizar un sistema dinámico que modela el crecimiento poblacional de *A. aegypti* y que permite establecer estrategias de control químico, biológico y químico - biológico orientadas a disminuir la incidencia del dengue clásico y en consecuencia el impacto socio-económico y cultural sobre la población humana.

El modelo propuesto para la dinámica de crecimiento poblacional del *A. aegypti* está planteado con base en los modelos tipo presa-depredador y considerando control químico y biológico del mosquito, el cual es considerado como la presa. El modelado de la dinámica se justifica teóricamente como un proceso estocástico

continuo con estados discretos y tasas de transición de flujos de Poisson, mediante ecuaciones diferenciales ordinarias para magnitudes promedio. El proceso integra el ciclo de vida del *A. aegypti*, el estadio del mosquito maduro y un estadio inmaduro (huevo, larva, pupa). Se considera además la mortalidad por químico adulticida, crecimiento logístico del depredador, capacidad de carga de los criaderos y la depredación sigue una respuesta funcional tipo I de Holling. Se establecen criterios para diferentes estrategias de control con base en el umbral de crecimiento del mosquito.

Una vez planteado el modelo que interpreta la dinámica en la sección 2, se realiza el análisis de estabilidad local de cada solución estacionaria con base en el umbral de crecimiento poblacional del mosquito. Se aplica el criterio de Bendixson para probar la no existencia de órbitas periódicas en la región de sentido biológico del sistema y se establecen criterios de control del mosquito, correspondientes a las estrategias de control químico, control biológico y control químico-biológico. En la sección 4 se presenta la simulación numérica del modelo en diferentes escenarios hipotéticos y considerando las diferentes estrategias de control. Finalmente en la sección 5 se hace un resumen de resultados y se muestran las conclusiones del trabajo.

2 El modelo

La dinámica de crecimiento poblacional del mosquito *A. aegypti* con control químico adulticida y control biológico, se interpreta como un proceso estocástico continuo con estados discretos y tasas de flujos de Poisson, mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para las magnitudes promedio.

En la formulación del modelo se considera el ciclo de vida del mosquito (mosquitos maduros y estados inmaduros), se incluye un depredador pasivo del estado inmaduro (huevos, larvas, pupas) del mosquito cuyo número de capturas es proporcional al número promedio de presas, lo que concuerda con una respuesta funcional tipo I de Holling. Se asume crecimiento logístico del depredador con capacidad de carga K_z , y capacidad de carga de los estados inmaduros K_y y mortalidad del mosquito maduro por aplicación del insecticida.

Las variables y parámetros del modelo son:

- x : número promedio de mosquitos maduros sin resistencia en un tiempo t .
- y : número promedio de estadios inmaduros (huevos, larvas, pupas) en un tiempo t .
- z : número promedio de depredadores de estadios inmaduros (huevos, larvas, pupas) en un tiempo t .
- ω : tasa de desarrollo de los estadios inmaduros (huevos, larvas, pupas) a mosquitos maduros.

- π : tasa de mortalidad natural de los mosquitos maduros.
- ϕ : tasa de ovoposición de los mosquitos maduros.
- δ : tasa de mortalidad natural de los estadios inmaduros (huevos, larvas, pupas).
- K_y : capacidad de carga de los estadios inmaduros.
- K_z : capacidad de carga del depredador.
- ρ : tasa de incremento del depredador.
- β : tasa de depredación con $\beta \geq 0$.
- α : tasa de mortalidad por aplicación del insecticida con $\alpha \geq 0$.

Se considera que los parámetros de control α y β pueden variar a diferencia de los demás parámetros del modelo ω , π , ϕ , δ , ρ , K_y y K_z que se consideran constantes.

El sistema de ecuaciones diferenciales que interpreta la dinámica propuesta es el siguiente:

$$\frac{dx}{dt} = \omega y - (\pi + \alpha)x \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \phi x \left(1 - \frac{y}{K_y}\right) - (\omega + \delta)y - \frac{\beta zy}{y + \eta} \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dt} = \rho z \left(1 - \frac{z}{K_z}\right) \quad (3)$$

con condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, y $z(0) = z_0$, con ω , π , ϕ , δ , β , ρ , K_y , $K_z \geq 0$ y definido en la región de sentido biológico:

$$\psi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, 0 \leq y \leq K_y, 0 \leq z \leq K_z\}$$

3 Análisis de estabilidad local

El sistema formado por las ecuaciones (1) a (3) es desacoplado en una vía, puesto que la ecuación (3) no depende de las variables x e y .

Se inicia el análisis determinando las soluciones estacionarias de la ecuación (3), es decir, donde $\frac{dz}{dt} = 0$ y se obtiene $z = 0$ ó $z = K_z$. Determinando que $z = \hat{z}_0 = 0$ es una solución estacionaria trivial inestable.

En el caso de que $z = K_z$, la solución estacionaria no trivial es estable. Sustituyendo este equilibrio en la ecuación (2), el sistema correspondiente (1) a (3) se desacopla en el siguiente sistema:

$$\frac{dx}{dt} = \omega y - (\pi + \alpha)x = f(x, y) \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dt} = \phi x \left(1 - \frac{y}{K_y}\right) - (\omega + \delta)y - \frac{\beta K_z y}{y + \eta} = g(x, y) \quad (5)$$

el cual tiene sus trayectorias en la región de sentido biológico:

$$\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq K_y\}$$

Las soluciones estacionarias de este sistema son: la solución estacionaria trivial $(0, 0)$ y la solución de coexistencia determinada por la ecuación cuadrática:

$$y^2 + by + c = 0 \quad (6)$$

con,

$$b = \eta + \frac{K_y}{\psi(\alpha, 0)}(1 - \psi(\alpha, 0)) \quad \text{y} \quad c = \frac{\beta K_z K_y (\pi + \alpha)}{\phi \omega} + \frac{\eta K_y}{\psi(\alpha, 0)}(1 - \psi(\alpha, 0))$$

donde,

$$\psi(\alpha, 0) = \frac{\phi \omega}{(\pi + \alpha)(\omega + \delta)}$$

es el umbral de crecimiento poblacional del mosquito sin depredación pero con control químico. Este umbral indica el número promedio de mosquitos adultos producidos por un mosquito, donde $\frac{\phi}{\pi + \alpha}$ es el número promedio de huevecillos producidos por un mosquito hembra, $\omega + \delta$ es el total de estados inmaduros y $\frac{\omega}{\omega + \delta}$ la probabilidad de que pasen al estado adulto.

El umbral de crecimiento poblacional del mosquito sin control biológico y sin control químico es,

$$\psi(0, 0) = \frac{\phi \omega}{\pi(\omega + \delta)}$$

que indica el número promedio de mosquitos adultos producidos por un mosquito, donde $\frac{\phi}{\pi}$ es el número promedio de huevecillos producidos por un mosquito hembra, $\omega + \delta$ es el total de estados inmaduros y $\frac{\omega}{\omega + \delta}$ la probabilidad de que pasen al estado adulto.

En el caso del control integrado, el umbral de crecimiento del mosquito toma la forma:

$$\psi(\alpha, \beta) = \frac{\phi \omega}{(\pi + \alpha)(\omega + \delta + \frac{\beta K_z}{\eta})}$$

e indica el número promedio de mosquitos producidos por un mosquito, donde $\frac{\phi}{\pi+\alpha}$ es el número promedio de huevecillos producidos por un mosquito hembra, $\omega + \delta + \frac{\beta K_z}{\eta}$ es el total de estados inmaduros y $\frac{\omega}{\omega+\delta+\frac{\beta K_z}{\eta}}$ la probabilidad de que pasen al estado adulto.

Sustituyendo la raíz positiva y_+ (que tiene sentido biológico) de la ecuación (6) en la ecuación (4) en equilibrio, resulta $x = \frac{\omega}{\pi+\alpha}y_+$. Luego la solución estacionaria de coexistencia es $\left(\frac{\omega}{\pi+\alpha}y_+, y_+\right)$.

Para analizar la estabilidad local de cada solución estacionaria es necesario linealizar el sistema correspondiente a las ecuaciones (4) y (5) en la vecindad de dichas soluciones. Para ello se calculan los elementos de la matriz jacobiana en el sistema de ecuaciones (4) y (5) derivando parcialmente las funciones f y g con respecto a x , y con lo que se tiene,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_E &= -(\pi + \alpha) & \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_E &= \omega \\ \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_E &= \phi \left(1 - \frac{\hat{y}}{K_y}\right) & \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_E &= -\frac{\phi}{K_y}\hat{x} - (\omega + \delta) - \frac{\beta\eta K_z}{(\hat{y} + \eta)^2} \end{aligned}$$

donde E es la solución estacionaria. El sistema lineal en las variables u y v para la solución estacionaria de coexistencia es:

$$\frac{du}{dt} = -(\pi + \alpha)u + \omega v \quad (7)$$

$$\frac{dv}{dt} = \phi \left(1 - \frac{\hat{y}}{K_y}\right) u + \left\{ -\frac{\phi}{K_y}\hat{x} - (\omega + \delta) - \frac{\beta\eta K_z}{(\hat{y} + \eta)^2} \right\} v \quad (8)$$

La matriz jacobiana correspondiente a la solución estacionaria trivial tiene la forma:

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} -(\pi + \alpha) & \omega \\ \phi & -\left(\omega + \delta + \frac{\beta K_z}{\eta}\right) \end{pmatrix}$$

y por lo tanto, la traza (γ) y el determinante (σ) de la matriz $A(0,0)$ son respectivamente:

$$\gamma = -\left(\pi + \alpha + \omega + \delta + \frac{\beta K_z}{\eta}\right) < 0$$

$$\sigma = (\pi + \alpha) \left(\omega + \delta + \frac{\beta K_z}{\eta}\right) (1 - \psi(\alpha, \beta))$$

donde $\psi(\alpha, \beta)$ es el umbral de crecimiento del mosquito en presencia del depredador, definido antes.

Para $\psi(\alpha, \beta) < 1$, se verifica que $\gamma < 0$ y $\sigma > 0$. Por tanto, la solución estacionaria trivial $(0, 0)$ es local y asintóticamente estable y corresponde a un nodo. Los resultados anteriores conducen a formular el siguiente teorema:

Teorema 5. *Si $\psi(\alpha, \beta) < 1$ entonces la solución estacionaria trivial del sistema correspondiente a las ecuaciones (4) y (5) es local y asintóticamente estable.*

En el caso $\psi(\alpha, \beta) = 1$ se tiene $\gamma < 0$ y $\sigma = 0$, luego los valores propios son: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -\gamma$. En este caso crítico se analiza la existencia de órbitas periódicas.

3.1 Soluciones periódicas

Es claro que, el único caso en que podrán presentarse soluciones periódicas es cuando $\psi(\alpha, \beta) = 1$.

En este caso la ecuación característica correspondiente a la solución estacionaria trivial presenta una raíz nula, por esta razón estudiamos la existencia o no de órbitas periódicas, mediante la aplicación del siguiente teorema:

Teorema 6. *(Criterio de Bendixson). Si en una región simplemente cerrada $D \subset \mathbb{R}^2$ la expresión $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ no es idénticamente cero y no cambia de signo, entonces el sistema:*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \quad (9)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad , \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (10)$$

donde f, g son al menos de clase C^1 , no tiene órbitas cerradas enteramente en D [29].

Para aplicar este teorema al modelo en estudio considere las funciones f y g como en (4) y (5), tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -(\pi + \alpha) \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= -\frac{\phi}{K_y}x - \omega - \delta - \frac{\eta\beta K_z}{(y + \eta)^2} \end{aligned}$$

entonces, es fácil ver que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = -\left[\pi + \alpha + \omega + \delta + \frac{\phi}{K_y}x + \frac{\eta\beta K_z}{(y + \eta)^2} \right]$$

del hecho que $x \geq 0$ se deduce que $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ tiene signo negativo. De aquí se concluye el siguiente teorema:

Teorema 7. (No existencia de órbitas periódicas) Para $\psi(\alpha, \beta) = 1$ el sistema (4) y (5) no tiene órbitas periódicas en la región de sentido biológico Π .

Para determinar la estabilidad local [8, 19, 23] de la solución estacionaria de coexistencia, se inicia escribiendo la matriz jacobiana con base en los coeficientes de las ecuaciones (4) y (5), así:

$$A \begin{pmatrix} \frac{\omega}{\alpha + \pi} y_+, y_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\pi + \alpha) & \omega \\ \phi \left(1 - \frac{y_+}{K_y}\right) & - \left(\frac{\phi\omega}{K_y(\pi + \alpha)} y_+ + \omega + \delta + \frac{\beta\eta K_z}{(y_+ + \eta)^2} \right) \end{pmatrix}$$

la cual tiene como traza y determinante:

$$\begin{aligned} \gamma &= - \left(\frac{\phi\omega}{K_y(\pi + \alpha)} y_+ + \pi + \alpha + \omega + \delta + \frac{\beta\eta K_z}{(y_+ + \eta)^2} \right) \\ \sigma &= (\pi + \alpha) \left(\frac{\phi\omega}{K_y(\pi + \alpha)} y_+ + \omega + \delta + \frac{\beta\eta K_z}{(y_+ + \eta)^2} \right) - \omega\phi \left(1 - \frac{y_+}{K_y}\right) \end{aligned}$$

simplificando,

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\phi\omega}{K_y} y_+ + (\omega + \delta)(\pi + \alpha) + \frac{\beta\eta K_z(\pi + \alpha)}{(y_+ + \eta)^2} - \omega\phi + \frac{\omega\phi}{K_y} y_+ \\ \sigma &= \frac{2\phi\omega}{K_y} y_+ + \frac{\beta\eta K_z(\pi + \alpha)}{(y_+ + \eta)^2} + (\omega + \delta)(\pi + \alpha)(1 - \psi(\alpha, 0)) \end{aligned}$$

donde, $\psi(\alpha, 0) = \frac{\phi\omega}{(\omega + \delta)(\pi + \alpha)}$. Por tanto, $\sigma > 0$ cuando $\psi(\alpha, 0) < 1$ y en consecuencia la solución estacionaria de coexistencia es un nodo estable.

Teorema 8. Si $\psi(\alpha, 0) < 1$ entonces la solución estacionaria de coexistencia del sistema correspondiente a las ecuaciones (4) y (5) es local y asintóticamente estable (un nodo).

3.2 Estrategias de control

Estrategia de control biológico: es decir, $\alpha = 0$. El mosquito se controla si $\psi(0, \beta) < 1$. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\phi\omega}{\pi \left(\omega + \delta + \frac{\beta K_z}{\eta} \right)} &< 1 \\ \phi\omega &< \pi \left(\omega + \delta + \frac{\pi\beta K_z}{\eta} \right) \\ \phi\omega - \pi(\omega + \delta) &< \frac{\pi\beta K_z}{\eta} \\ \pi(\omega + \delta)\eta \left(\frac{\phi\omega}{\pi(\omega + \delta)} - 1 \right) &< \beta\pi K_z \end{aligned}$$

de donde,

$$\beta > \frac{\eta(\omega + \delta)}{K_z}(\psi(0,0) - 1) \quad , \quad \psi(0,0) \leq 1$$

llamado criterio de control biológico.

Estrategia de control químico: es decir, $\beta = 0$. De manera similar el mosquito se controla si $\psi(\alpha, 0) < 1$. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\phi\omega}{(\pi + \alpha)(\omega + \delta)} &< 1 \\ \phi\omega &< \pi(\omega + \delta) + \alpha(\omega + \delta) \\ \phi\omega - \pi(\omega + \delta) &< \alpha(\omega + \delta) \\ \pi(\omega + \delta) \left(\frac{\phi\omega}{\pi(\omega + \delta)} - 1 \right) &< \alpha(\omega + \delta) \end{aligned}$$

de donde,

$$\alpha > \pi(\psi(0,0) - 1) \quad , \quad \psi(0,0) \leq 1$$

llamado criterio de control químico.

Estrategia de control integrado: en este caso $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$, es decir, la población de mosquitos y la población de estados inmaduros se controla si $\psi(\alpha, \beta) < 1$. Por tanto,

$$\frac{\phi\omega}{(\pi + \alpha)(\omega + \delta + \frac{\beta K_z}{\eta})} < 1$$

llamado criterio de control integrado.

4 Simulación numérica

Los cálculos numéricos de los umbrales de crecimiento poblacional, las soluciones estacionarias, el valor de la traza y el determinante, la simulación y plano de fase del modelo se hizo utilizando el programa MAPLE con las condiciones iniciales y valores hipotéticos de los parámetros que se muestran en el cuadro (1).

El umbral de crecimiento poblacional sin control es $\psi(0,0) \approx 8.88$. En este caso la solución estacionaria trivial $(0,0)$ es inestable y la solución estacionaria de coexistencia es $\hat{y} = \frac{K_y}{\psi(0,0)}(\psi(0,0) - 1) \approx 44$ y $\hat{x} = \frac{\omega}{\pi + \alpha}y_+ \approx 29$ es local y asintóticamente estable.

Introduciendo el control químico ($\alpha > 0$), la solución estacionaria

trivial $(0,0)$ es local y asintóticamente estable (un nodo estable) si $\psi(\alpha, 0) < 1$. En este caso $\alpha > \frac{\phi\omega}{\omega + \delta} - \pi \approx 2.37$. Por ejemplo para $\alpha = 2.4$: $\psi(2.4, 0) = \frac{\phi\omega}{(\pi + \alpha)(\omega + \delta)} \approx 0.99$ y para $\psi(1.5, 0) \approx 1.48 > 1$ la solución estacionaria de coexistencia:

$$\hat{y} = \frac{K_y}{\psi(\alpha, 0)}(\psi(\alpha, 0) - 1) \approx 16 \quad , \quad \hat{x} = \frac{\omega}{\pi + \alpha}y_+ \approx 1.8$$

Cuadro 1: Variables y parámetros

Parámetros	Símbolo	Valor
Promedio de mosquitos maduros sin resistencia	$x(0)$	20
Promedio de estadios inmaduros	$y(0)$	10
Promedio de depredadores de estadios inmaduros	$z(0)$	5
Tasa de desarrollo de los estadios inmaduros	ω	0.2
Tasa de mortalidad natural de los mosquitos maduros	π	0.3
Tasa de ovoposición de los mosquitos maduros	ϕ	8
Tasa de mortalidad natural de los estadios inmaduros	δ	0.4
Capacidad de carga de los estadios inmaduros	K_y	50
Capacidad de carga del depredador	K_z	70
Tasa de incremento del depredador	ρ	0.35
Constante	η	2.5

es local y asintóticamente estable.

En el caso de control químico y control biológico la solución estacionaria de coexistencia esta determinada por: $y_+ = \frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$ con $\psi(1, 0) \approx 2.05$ y si $\beta = 0.05$:

$$b = \eta + \frac{K_y}{\psi(\alpha, 0)}(1 - \psi(\alpha, 0)) \approx -23.125,$$

$$c = \frac{\beta K_z K_y (\pi + \alpha)}{\phi \omega} + \frac{\eta K_y}{1 - \psi(\alpha, 0)} \approx 78.1250$$

luego $y_+ \approx 19$. Por tanto, la solución de coexistencia es $\left(\frac{\omega}{\pi+\alpha}y_+, y_+\right) = (3, 19)$.

Para determinar la estabilidad de esta solución estacionaria calculamos la traza y el determinante:

$$\gamma = -\left(\frac{\phi\omega}{K_y(\pi+\alpha)}y_+ + \pi + \alpha + \omega + \delta + \frac{\beta\eta K_z}{(y_+ + \eta)^2}\right) \approx -2.4$$

$$\zeta = \frac{2\phi\omega}{K_y}y_+ + \frac{\beta\eta K_z}{(y_+ + \eta)^2} + (\omega + \delta)(\pi + \alpha)(1 - \psi(\alpha, 0)) \approx 0.5$$

Por tanto, la solución estacionaria no trivial es un nodo estable.

4.3 Simulaciones y planos de fase

En las figuras (1-4) que se analizan a continuación se muestra en el plano de la izquierda la solución numérica para $x(t)$ en línea continua y para $y(t)$ en línea interrumpida. En el plano de la derecha se muestra el correspondiente plano de fases, que permite observar en cada caso la estabilidad del punto de equilibrio.

Cada figura es obtenida variando los valores de α y β y manteniendo constantes los demás parámetros del modelo.

Las gráficas de la figura (1), muestran el comportamiento estable en el tiempo de la población de mosquitos y de estadios inmaduros sin control biológico y sin control químico, el comportamiento cualitativo en el plano de fase muestra la tendencia de las trayectorias hacia el punto de equilibrio no trivial que en este caso se comporta como un atractor.

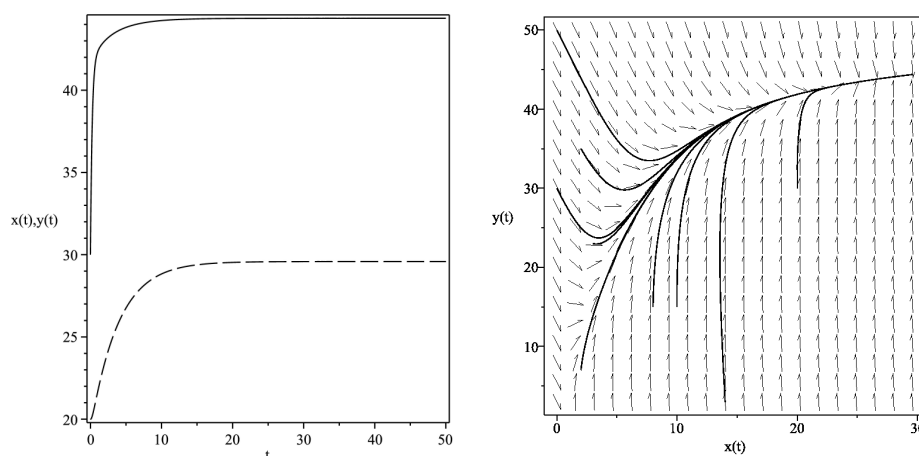


Figura 1: Comportamiento en el tiempo de la población de mosquitos maduros x (—) y la población de los estados inmaduros y (---) sin control con $\psi(0, 0) \approx 8,88$ y el respectivo plano de fase.

Las gráficas de la figura (2), muestran el comportamiento estable en el tiempo de la población de mosquitos y de estadios inmaduros con control químico, el comportamiento cualitativo en el plano de fase muestra la tendencia de las trayectorias hacia la solución estacionaria trivial $(0, 0)$, equilibrio atractor.

Las gráficas de la figura (3), muestran el comportamiento estable en el tiempo de la población de mosquitos y de estadios inmaduros con control químico, el comportamiento geométrico en el plano de fase muestra la evolución de las trayectorias hacia la solución estacionaria de coexistencia, equilibrio atractor.

Las gráficas de la figura (4), muestran el comportamiento estable en el tiempo de la población de mosquitos y de estadios inmaduros con control químico y control biológico, el comportamiento geométrico en el plano de fase muestra la evolución de las trayectorias hacia la solución estacionaria de coexistencia.

El control integrado del mosquito depende de las tasas de depredación y tasa de mortalidad del mosquito por efecto del químico aplicado. Con una tasa de depredación baja de $\beta = 0.05$ y una tasa de mortalidad del mosquito (α) alta por efecto del químico de 1,0, se alcanza un buen control para un umbral de crecimiento del mosquito $\psi(1, 0) \approx 2.05$.

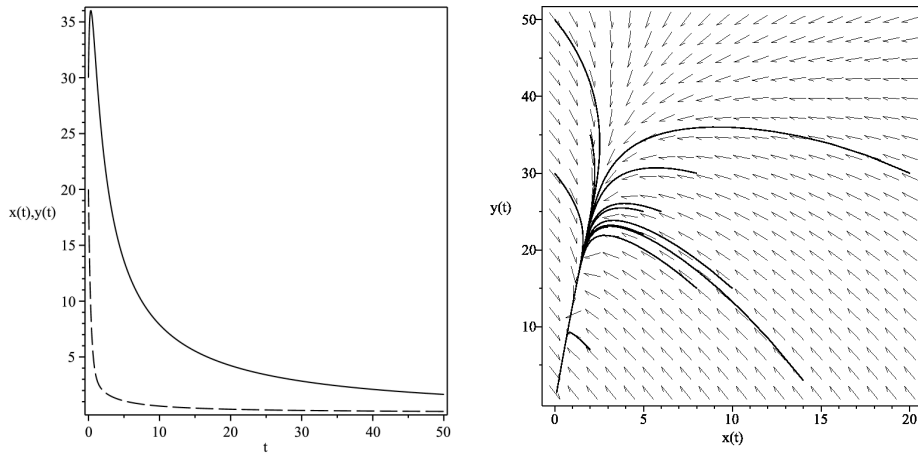


Figura 2: Comportamiento en el tiempo de la población de mosquitos maduros x (—) y la población de los estados inmaduros y (---) con control químico, $\psi(2,4,0) \approx 0,99$ y el respectivo plano de fase.

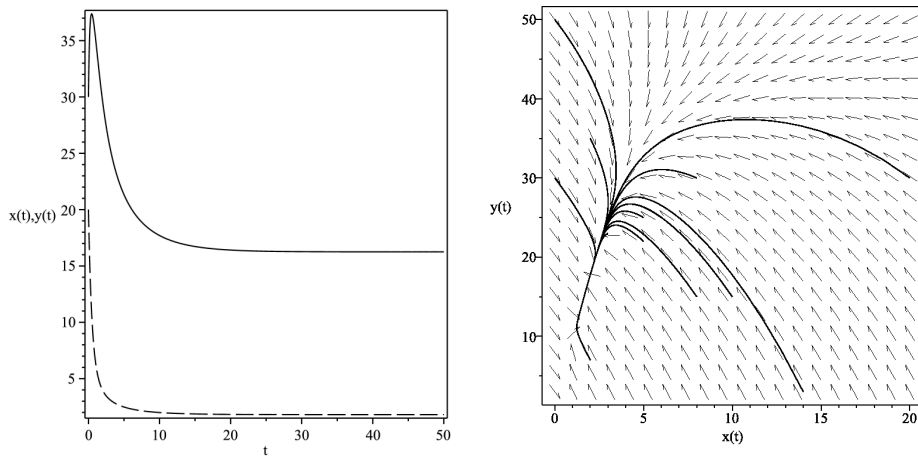


Figura 3: Comportamiento en el tiempo de la población de mosquitos maduros x (—) y la población de los estados inmaduros y (---) con control químico, $\psi(1,5,0) \approx 1,48$ y el respectivo plano de fase.

5 Resultados

Del desarrollo de esta investigación se obtuvieron los siguientes resultados:

Se modeló la dinámica de crecimiento poblacional del mosquito *Aedes aegypti* integrando control biológico mediante un depredador y control químico sobre el mosquito maduro, con base en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para las magnitudes promedio, correspondientes a un proceso estocástico continuo con tasas de transición constantes de flujos de Poisson.

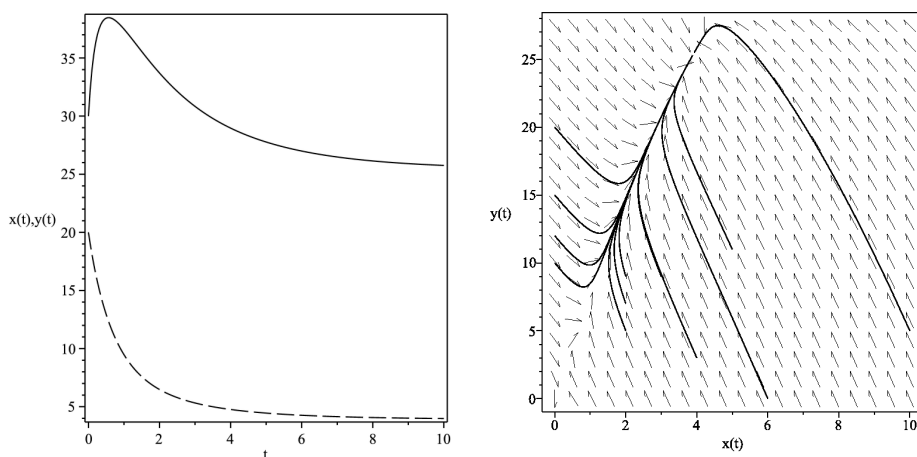


Figura 4: Comportamiento en el tiempo de la población de mosquitos maduros x (—) y la población de los estados inmaduros y (---) con control químico y control biológico, $\psi(1, 0) \approx 2.05$, $\beta = 0.05$ y el respectivo plano de fase.

La reducción del sistema de dimensión tres a un sistema de dimensión dos, utilizando el desacoplamiento en una vía.

Se realizó el análisis de estabilidad local de las soluciones estacionarias del modelo propuesto con base en los umbrales de crecimiento poblacional.

Se probó la no existencia de órbitas periódicas en la región de sentido biológico, mediante el criterio de Bendixson.

Se determinaron los umbrales de crecimiento poblacional del mosquito dependiendo de la estrategia de control.

Se deducen criterios de control para las diferentes estrategias.

6 Conclusiones

Se concluye que la estabilidad del sistema depende de condiciones umbrales de crecimiento del mosquito, la introducción de control biológico y químico en la dinámica poblacional es una buena estrategia de control del mosquito y el control integrado del mosquito depende de las tasas de depredación y tasa de mortalidad del mosquito por efecto del químico aplicado.

Bajo los supuestos considerados en este modelo, la dinámica poblacional del mosquito no presenta comportamientos cíclicos, sino que dependiendo de las condiciones iniciales y de las estrategias de control empleadas, la población de mosquitos será eliminada del medio o permanecerá en él de manera indefinida. Esto podría explicar el comportamiento endémico del dengue en las regiones tropicales y subtropicales del mundo, donde se cuenta con presencia del mosquito casi todo el año, más aún dadas las precarias estrategias de control que se implementan en la práctica.

Es importante considerar en el modelado de la dinámica poblacional de *A. aegypti* el efecto que tienen los factores climáticos. Esto podría llevar a mejores resultados, y permitir entender lo que ocurriría en el caso de que el mosquito colonice regiones geográficas con mayores fluctuaciones ambientales.

Referencias

- [1] Bartley L. M., Donnelly C. A. and Garnett G. P. *The seasonal pattern of dengue in endemic areas: Mathematical models of mechanisms*, J. Transactions of the Royal Society of Tropical Medicine and Hygiene. 96 (4):387 - 397, (2002).
- [2] Busenberg S. and Cooke K. *Vertically transmitted diseases*, Berlin: Springer - Verlag (1988).
- [3] Caetano M. A. L., Yoneyama T. *Optimal and sub-optimal control in dengue epidemics*, Optimal control applications and methods. 22:63 - 73 (2001).
- [4] Costero A, Edman J. D, Clark G. G, Scott T. W. *Life table study of Aedes aegypti (Diptera: Culicidae) in Puerto Rico fed only human blood plus sugar*, J. Med Entomol. 35:809 - 813, (1998).
- [5] CH Wang, N. T Chang, H. H. Wu and C. M HO. *Integrated control of the dengue vector Aedes aegypti in Liu- Chiu village, Ping - Tung, country, Taiwan*, J. AM. Mosq. Control Assoc. 16(2):93 - 99, (2000).
- [6] Duque J. E., Muñoz L. A. and Navarro S. M. *Modelo de simulación para el control del mosquito Aedes aegypti, trasmisor del dengue y la fiebre amarilla, por el crustáceo Mesocyclops spp*, Rev. Salud Pública 6: 1 - 11, (2003).
- [7] Dye C. *Models for the population dynamics of the yellow fever mosquito, Aedes aegypti*, Journal of Animal Ecology 53: 247 - 268, (1984).
- [8] Edelstein, K. L. *Mathematical Models in Biology*. McGraw - Hill, Inc., 1988.
- [9] Espinoza F. G. *Dinámica de transmisión del dengue en la Ciudad de Colima, México*. Tesis. Universidad de Colima, (2002).
- [10] Esteva L. and C. Vargas. *A model for dengue disease with variable human population*, J. Math. Biol. 38: 220, (1999).
- [11] Esteva L. and C. Vargas. *Coexistence of different serotypes of dengue virus*, J. Math. Biol. 46: 31 - 47, (2003).
- [12] Esteva L. and C. Vargas. *Influence of vertical and mechanical transmission on the dynamics of dengue disease*, Math. Biosci. 167: 51 - 64, (2000).

- [13] Feng Z., Velasco - Hernandez, J. X. *Competitive exclusion in a vector - host model for the dengue fever*, J. Math. Biol. 35: 523 - 544, (1997).
- [14] Fernández S. I. *Biología y control de Aedes aegypti* Manual de operaciones, Universidad Autónoma de Nuevo León, Monterrey, Nuevo León, México, (1999).
- [15] Greenhalgh D. *Some results on optimal control applied to epidemics*, Math. Biosci. 88, 125 - 158, (1986).
- [16] Gersovitz M., Hammer J. S. *The economical control of infectious diseases*. The Economic Journal, 114, 1 - 27, (2004).
- [17] Kay B and Nam V. S. *New strategy against Aedes agypti in the Vietnam*, Lancet. 365:613 - 617, (2005).
- [18] Mendes L. P., Codeco T. C., Massad E., and Struchiner C. J. *Uncertainties regarding dengue modeling in Rio de Janeiro, Brazil*, Memorias del Instituto Oswaldo Cruz. 98 (7) : 871 - 878, (2003).
- [19] Muñoz L. A., Colorado T. H., Garcia A. O. M. *Modelos Biomatemáticos I*, ISBN 978-958-44-4079-2, Editado por Ediciones Elizcom (2008).
- [20] Neil M. F., Christl A. D. and Roy M. A. *Transmission dynamics and epidemiology of dengue: Insights from age - stratified Sero - prevalence surveys*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London Biological Sciences. 354 (1384): 757 - 768, (1999).
- [21] Newton E. A. C and Reiter P. *A model of the transmission of dengue fever with an evaluation of the impact of Ultra - Low volume (ULV) insecticide applications on dengue epidemics*, American Journal of Tropical Medicine and Hygiene, 47: 709 - 720, (1992).
- [22] O. Marcelo, Solari H. G., Schweigmann N. *A stochastic population dynamics model for Aedes aegypti: Formulation and application to a city with temperate climate*, Bulletin of Mathematical Biology, (2006).
- [23] Perko L. *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer - Verlag, (1996).
- [24] Pongsumpan P and Tang IM. *Transmission of dengue hemorrhagic fever in an age structured population*, J. Mathematical and Computer Modelling. 37(9 - 10):949 - 961, (2003).
- [25] Ruiz R. J. *Modelo estocástico de transmisión del dengue en poblaciones estructuradas*, Tesis doctoral, Tecomán, Colima, México, 2004.

- [26] Takahashi L. T., Maidana N. A. and Ferreira Jr. W. C. *O Aedes e sua onda*, Biomatemática XIII : 33 - 44, (2003).
- [27] Trips M, Hausermann W . *Dispersal and other population parameters of Aedes aegypti in an African village and their possible significance in epidemiology of vector - borne diseases*, Am. J. Trop. Med. Hyg. 35:1263 - 1279, (1986).
- [28] Wet N. de, Ye W., Hales S. et al. *Use of computer model to identify potential hotspots for dengue fever in New Zealand*, New Zealand Medical Journal. 114(1140):420 - 422, (2001).
- [29] Wiggins S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer - Verlag New York, Inc., (1990).
- [30] World Health Organization. *Manual on environmental management for mosquito control*, Geneva, (1982).
- [31] Yang H. M. *Dinamica da transmissao da dengue e delineamento de mecanismos de controle e prevencao*, UNICAMP/IMECC - DMA, pp. 63 - 89, Print.

Dirección de los autores

Carol Vanessa Marín G. — Laboratorio de Matemática y Biología Teórica (MyBT), Grupo de Modelación Matemática en Epidemiología (GMME), Departamento de Matemáticas, Universidad del Quindío. Armenia-Colombia
e-mail: kavasmagu103@hotmail.com

Anibal Muñoz Loaiza — Laboratorio de Matemática y Biología Teórica (MyBT), Grupo de Modelación Matemática en Epidemiología (GMME), Departamento de Matemáticas, Universidad del Quindío. Armenia-Colombia
e-mail: anibalml@hotmail.com

Hernán Darío Toro Zapata — Laboratorio de Epidemiología y Fisiología Matemática (EPyFIMAT), Grupo de Modelación Matemática en Epidemiología (GMME), Departamento de Matemáticas, Universidad del Quindío. Armenia-Colombia
e-mail: hdtoro@uniquindio.edu.co

Leonardo Duván Restrepo Alape — Laboratorio de Epidemiología y Fisiología Matemática (EPyFIMAT), Grupo de Modelación Matemática en Epidemiología (GMME), Departamento de Matemáticas, Universidad del Quindío. Armenia-Colombia
e-mail: ldrestrepo@uniquindio.edu.co